



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه سؤال

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

بودجه آزمون: صفحات ۱ تا ۴۲

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	ریاضیات گسسته	۲	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

سوالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز		
ردیف	سوالات (پاسخ برگ دارد)			
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید:</p> <p>(الف) حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۳! بخش پذیر است.</p> <p>(ب) اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$، در این صورت $a \leq b$.</p> <p>(ج) گراف K_4 با مجموعه رأسهای $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ دارای ۴ زیرگراف C_3 است.</p> <p>(د) یک گراف ساده، همبند است، اگر و تنها اگر رأس ایزوله نداشته باشد.</p>			
۲	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>(الف) مربع هر عدد اول بزرگتر از ۳ همواره به صورت است.</p> <p>(ب) حاصل $[120, 48), (48, 72]$ برابر است.</p> <p>(ج) هرگاه بین هر دو رأس یک گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، آن گراف را می نامیم.</p> <p>(د) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه p برابر است.</p>			
۳	<p>در هر قسمت گزینه صحیح را از میان گزینه های داده شده انتخاب کنید و در پاسخ برگ بنویسید.</p> <p>(الف) اگر ۲۵ خرداد در یک سال چهارشنبه باشد، ۲۷ اسفند از همان سال چه روزی از هفته است؟</p> <p>(۱) سه شنبه (۲) شنبه (۳) یکشنبه (۴) دوشنبه</p> <p>(ب) عدد ۱۳۶۷ به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟</p> <p>(۱) $[3]_7$ (۲) $[5]_7$ (۳) $[0]_7$ (۴) $[2]_7$</p>			
۴	<p>در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید.</p> <p>(الف) اگر به حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی، یک واحد اضافه کنیم، حاصل عددی مربع کامل است.</p> <p>(ب) اگر برای سه مجموعه A, B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$، آن گاه $B = C$.</p>			
۵	<p>اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است؟</p>			
۶	<p>اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.</p>			
۷	<p>اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x + y + z) - 3$			
۸	<p>اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $4k + 1$، $5 4k + 1$، ثابت کنید: $25 16k^2 + 28k + 6$</p>			
۹	<p>ثابت کنید اگر $p \geq 3$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود. ($k \in \mathbb{Z}$)</p>			
۱۰	<p>باقی مانده تقسیم عدد $A = (3^{11} - 1) \times 4$ را بر ۲۳ به دست آورید.</p>			
۱۱	<p>معادله هم نهشتی $4223x \equiv 79 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب های عمومی آن را به دست آورید.</p>			
۱۲	<p>به چند طریق می توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟</p>			
صفحه ۱ از ۲				

ردیف	سوالات (پاسخ‌برگ دارد)	نمره
سوالات آزمون شبهه‌ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته پایه: دوازدهم رشته: ریاضی و فیزیک تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴		
تعداد صفحه: ۲ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه ساعت شروع: نام و نام خانوادگی:		
آزمون شبهه‌ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز		
۱۳	گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ مفروض است. اگر داشته باشیم: $N_G(d) = \{a, b, c\}$, $N_G(c) = \{d, b\}$, $N_G(b) = \{a, d, c\}$, $N_G(a) = \{d, b\}$ الف) گراف G را رسم کنید. ب) یک دور به طول ۴ از گراف G بنویسید. ج) دو زیرگراف از مرتبه ۳ و اندازه ۳ از گراف G رسم کنید. د) حاصل $q(\bar{G}) + \Delta(\bar{G})$ را به دست آورید.	۲
۱۴	مجموع درجات گراف برابر ۲۴ است. اگر ۳ یال به یال‌های گراف G اضافه کنیم، گراف حاصل، گراف کامل می‌شود. مرتبه گراف G چقدر است؟	۱
۱۵	یک گراف ۴ رأسی غیر تهی K - منتظم رسم کنید که: الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
	موفق باشید.	۲۰
	صفحه ۲ از ۲	



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



پاسخبرگ ریاضیات گسسته (۳)

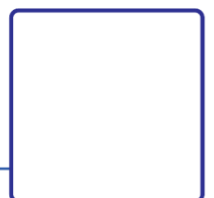
دورهٔ زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

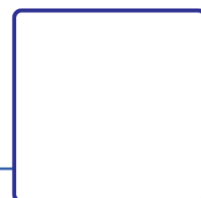
ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) (ب) (ج) (د)	۱
۲	الف) (ب) (ج) (د)	۱
۳	الف) (ب)	۱
۴	الف) (ب)	۱/۵
۵		۱/۵
۶		۱/۵



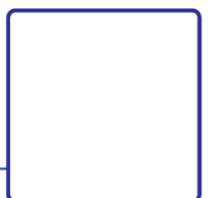
ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۷		۲
۸		۱
۹		۱/۵
۱۰		۱/۵



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۱		۱
۱۲		۱/۵
۱۳	الف) ب) ج) د)	۲



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۴		۱
۱۵	الف) ب)	۱
	موفق باشید.	۲۰





پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

بودجه آزمون: صفحات ۱ تا ۴۲

ویراستاران

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی‌پور

طراحان

سید جواد نظری - محدثه شیخعلی

درس

ریاضیات گسسته

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

مرضیه بنیانی

یگانه پوراابراهیم

زهرة جعفری

فائزه زارع

محدثه شیخ‌علی

محدثه عربگری


ساره محمدعلی‌نسب

زینب مرتضوی

سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ما با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

دکتر رسول خنجری

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - دوازدهم		تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
گروه آموزشی ماز		ساعت شروع:
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	<p>مصحح شو </p> <p>الف) درست (۰.۲۵) (صفحه ۳) ج) درست (۰.۲۵) (صفحه ۳۷) ب) درست (۰.۲۵) (صفحه ۱۱) د) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۳۹)</p> <p>بررسی دقیق‌تر: </p> <p>الف) هر سه عدد صحیح متوالی به فرم $۳k-۱, ۳k, ۳k+۱$ هستند و بنابراین حاصل ضرب آن‌ها عامل ۳ دارد. از طرفی اگر این سه عدد را به فرم $t, t+۱, t+۲$ بنویسیم از بین t و $t+۱$ دقیقاً یکی زوج بوده و بنابراین حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی بر $۶=۳!$ بخش پذیر است.</p> <p>ج) گراف کامل $K_۴$، $۴ = \binom{۴}{۳}$ زیرگراف $C_۳$ دارد. (مثلث!)</p> <p>د) اگر گراف همبند باشد، رأس ایزوله ندارد ولی اگر رأس ایزوله نداشته باشد، لزوماً همبند نیست.</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه </p> <p>مسیر تمرینی:  مشابه این سوال در سوال ۱ امتحان نهایی ۱۴۰۱ مطرح شده بود.</p>	۱
۲	<p>مصحح شو </p> <p>الف) $۶q+۱$ (۰.۲۵) (صفحه ۱۵) ج) همبند (۰.۲۵) (صفحه ۳۹) ب) ۱۲۰ (۰.۲۵) (صفحه ۱۷) د) $p-۱$ (۰.۲۵) (صفحه ۳۷)</p> <p>بررسی دقیق‌تر: </p> <p>الف) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، به فرم $۶k \pm ۱$ است، بنابراین: $(۶k \pm ۱)^۲ = ۳۶k^۲ \pm ۱۲k + ۱ = ۶q + ۱$ ب) از داخلی‌ترین ب.م.م / ک.م.م شروع می‌کنیم: $(۷۲, ۴۸) = ۲۴ \Rightarrow [۲۴, ۱۲۰] = ۱۲۰$</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه </p>	۲
۳	<p>مصحح شو </p> <p>الف) شنبه (گزینه ۲) (۰.۵) (صفحه ۳۰) ب) $[۲]_۷$ (گزینه ۴) (۰.۵) (صفحه ۲۹)</p> <p>بررسی دقیق‌تر: </p> <p>الف) اگر ۲۵ خرداد چهارشنبه باشد، باید تعداد روزهای باقی‌مانده تا ۲۷ اسفند را به پیمانانه ۷ حساب کنیم:</p> $۶ + ۳ \times ۳ + ۱ + ۵ \times ۳ + ۲۷ \equiv -۱ + ۳ \times ۳ + ۵ \times ۲ - ۱ \equiv ۱۷ \equiv ۳ \pmod{7}$ <p>تا آخر بهمن تابستان باقی‌مانده خرداد</p> <p>بنابراین ۲۷ اسفند، ۳ روز بعد از چهارشنبه بوده. (یعنی شنبه)</p>	۳

	<p>(ب) بنابراین: $۱۳۶۷ \in [۲]_{۷}$</p> <p>$۱۳۶۷ \equiv ۱۴۰۰ - ۳۳ \equiv ۲$</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه</p> <p>مسیر تمرینی: مشابه این سوال در سوال ۴ امتحان نهایی خرداد ۹۸ مطرح شده بود.</p> <p>نقشه نهایی: حتماً حواستون هست که ۶ ماه اول سال ۳۱ روزه هستن! و بعدش ۳۰ روزه میشه!</p>	
<p>۱/۵</p>	<p>مصطح شو</p> <p>الف) فرض کنید $n, n+1, n+2, n+3$، چهار عدد صحیح متوالی باشند، آن گاه: (صفحه ۳)</p> <p>$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)$ (۰.۲۵)</p> <p>حال اگر قرار دهیم: $t = n^2 + 3n$، داریم:</p> <p>$t(t+2)+1 = t^2 + 2t+1 = (t+1)^2$ (۰.۲۵)</p> <p>که مربع کامل است و حکم اثبات می شود.</p> <p>ب) مثال نقض: (۰.۷۵) (صفحه ۳)</p> <p>$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2\} \Rightarrow A \cup B = A \cup C = A, B \neq C$ $C = \{3\}$</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه</p> <p>نقشه نهایی: حتماً تو سوالاتی این بخش سعی کنین اول دنبال مثال نقض بگردید و بعد برید سراغ اثبات!</p>	<p>۴</p>
<p>۱/۵</p>	<p>مصطح شو</p> <p>روش اول: (صفحه ۵)</p> <p>اگر ab فرد باشد، a و b هم فرد هستند. (اگر فرد نباشن، حداقل یکی زوج و در نتیجه ab زوج است.) (۰.۷۵)</p> <p>بنابراین: $a = 2k+1, b = 2g+1$</p> <p>$a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2g+1)^2 = 4k^2 + 4k+1 + 4g^2 + 4g+1 = 2k'$ (۰.۷۵)</p> <p>و بنابراین $a^2 + b^2$ زوج است.</p> <p>روش دوم:</p> <p>اگر ab فرد باشد، a و b نیز فرد هستند (اگر فرد نباشن، حداقل یکی زوج و در نتیجه ab زوج خواهد بود!) (۰.۷۵)</p> <p>حال چون a فرد است (۰.۲۵)، a^2 نیز فرد و چون b فرد است (۰.۲۵)، b^2 نیز فرد است و در نتیجه:</p> <p>$a^2 + b^2 =$ زوج = فرد + فرد (۰.۲۵)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه</p>	<p>۵</p>

<p>۱/۵</p>	<p style="text-align: right;">مصّحّ شو </p> <p>با برهان خلف، فرض می کنیم علاوه بر $\alpha + \beta$، $\alpha + 2\beta$ نیز گویا باشد، حال چون $\alpha + \beta$ گویا است و می دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است (0.25)، پس $\beta = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta)$ نیز گویاست که خلاف فرض است، بنابراین فرض خلف باطل بوده و $\alpha + 2\beta$ گنگ است. (صفحه ۸)</p> <p style="text-align: right;">نقشه نهایی: </p> <p>ایده حل این سوالا عموماً استفاده از برهان خلف هست! خوب الگوش رو یاد بگیرید!</p>	<p>۶</p>
<p>۲</p>	<p style="text-align: right;">مصّحّ شو </p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x + y + z) - 3$ $\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1}_{(1)} \geq 0 \text{ (صفحه ۸)}$ $\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}_{(1)} \geq 0$ <p style="text-align: right;">اثبات به روش بازگشتی </p> <p>در این روش از حکم مسئله شروع می کنیم و با فرض درستی حکم، به یک رابطه بدیهی یا فرض مسئله می رسیم. در استفاده از این روش برای ساده کردن حکم مسئله از گزاره های دوشرطی استفاده می کنیم.</p> <p>توجه: گزاره دوشرطی $A \Leftrightarrow B$، زمانی درست است که گزاره های A و B هم ارزش باشند.</p> <p style="text-align: right;">مسیر تمرینی: </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۳ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ مطرح شده بود.</p>	<p>۷</p>
<p>۱</p>	<p style="text-align: right;">مصّحّ شو </p> <p style="text-align: right;">روش اول: (صفحه ۱۶)</p> $\left. \begin{aligned} 5 4k+1 &\Rightarrow 5 \times 5 5(4k+1) \Rightarrow 25 20k+5 \quad (0.25) \\ 5 4k+1 &\Rightarrow 5^2 (4k+1)^2 \Rightarrow 25 16k^2 + 8k + 1 \quad (0.25) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} 25 16k^2 + 28k + 6 \quad (0.5)$ <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> $5 4k+1 \Rightarrow 4k+1 = 5q \Rightarrow \begin{cases} (4k+1)^2 = (5q)^2 \\ 5(4k+1) = 5(5q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16k^2 + 8k + 1 = 25q^2 \quad (0.25) \\ 20k + 5 = 25q \quad (0.25) \end{cases}$ $\Rightarrow 16k^2 + 28k + 6 = 25q' \quad (0.25)$ $\Rightarrow 25 16k^2 + 28k + 6 \quad (0.25)$	<p>۸</p>

روش سوم:

$$5 \mid 4k+1 \Rightarrow 4k+1 \equiv 0 \Rightarrow 20k+5 \equiv 0, 16k^2+8k+1 \equiv 0 \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow 16k^2+28k+6 \equiv 0 \Rightarrow 25 \mid 16k^2+28k+6 \quad (0.25)$$

روش چهارم:

$$5 \mid 4k+1 \Rightarrow 5 \mid 4k+6 \Rightarrow 25 \mid (4k+1)(4k+6) \Rightarrow 25 \mid 16k^2+28k+6$$

روش پنجم:

$$5 \mid 4k+1 \Rightarrow 4k+1 \equiv 0 \Rightarrow 4k+6 \equiv 0 \Rightarrow (4k+1)(4k+6) \equiv 0 \Rightarrow 16k^2+28k+6 \equiv 0 \Rightarrow 25 \mid 16k^2+28k+6 \quad (0.25)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

ویژگی‌های رابطه عاد کردن

- $a \mid b \rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$
- $a \mid b \rightarrow a \mid mb$
- $a \mid b \rightarrow a \mid b^n : (n \in \mathbb{N})$
- $a \mid b \wedge b \mid c \rightarrow a \mid c$
- $a \mid b \wedge a \mid c \rightarrow a \mid b \pm c \xrightarrow{\text{تعمیم}} a \mid b \wedge a \mid c \rightarrow a \mid mb \pm nc$
- $a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$; نتیجه: $a \mid b \wedge b \mid a \rightarrow a = \pm b$
- $a \mid b \rightarrow a^n \mid b^n$
- $a \mid b \wedge c \mid d \rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b \xrightarrow{n \leq m} a^n \mid b^m$

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصطح شو

کافی است p را بر ۴ تقسیم کنیم (p عدد اول است)، در این صورت طبق قضیه تقسیم p به یکی از اشکال زیر خواهد بود: (صفحه ۲۹)

۱/۵ $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3 \quad (0.5)$

در حالت‌های $4k+2, 4k$ زوج است (0.25) و نمی‌تواند اول باشد (0.25)، بنابراین دو حالت $4k+1$ و $4k+3$ باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود. (0.5)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

مصّحح شو

$$25 = 32 \equiv 9 \Rightarrow (25)^{23} \equiv 81 \equiv 12 \Rightarrow 210 \equiv 12 \Rightarrow 211 \equiv 1 \Rightarrow (211 - 1)^{23} \equiv 0 \Rightarrow 4 \times (211 - 1)^{23} \equiv 0 \quad (\text{صفحه } 29) \quad (0.25)$$

و بنابراین باقی مانده تقسیم عدد $4 \times (211 - 1)$ بر 23 برابر صفر است. (0.25)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

ویژگی های رابطه هم نهشتی

$a \equiv b \rightarrow a \pm c \equiv b \pm c$

$a \equiv b \rightarrow ac \equiv bc$

$a \equiv b \rightarrow a^n \equiv b^n; (n \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} a \equiv b \\ c \equiv d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \\ a + c \equiv b + d \\ a - c \equiv b - d \end{cases}$$

$a \equiv b, b \equiv c \rightarrow a \equiv c$

$a \equiv b \rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$

$ac \equiv bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \equiv b \xrightarrow{\text{نتیجه}} ac \equiv bc \xrightarrow{(c,m)=1} a \equiv b$

$a \equiv b \xrightarrow{n|m} a \equiv b$

$a \equiv b, b \equiv c \xrightarrow{(m,n)=d} a \equiv c$

توجه: اگر باقی مانده تقسیم a بر m برابر r باشد، در این صورت داریم $a \equiv r$ به عبارت دیگر:

$a = mq + r \Leftrightarrow a \equiv r$

توجه: هرگاه دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم باقی مانده باشند، داریم: $a \equiv b$

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۵ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰ مطرح شده بود.

مصّحح شو

$(423, 11) | 79 \quad (0.25)$

در ابتدا بررسی می کنیم آیا معادله جواب دارد؟ برای بررسی داریم: (صفحه ۳۰)

(0.25)

(0.25)

(0.25)

$423x \equiv 79 \Rightarrow 5x \equiv 2 \Rightarrow 5x \equiv 35 \xrightarrow{(5,1)=1} x \equiv 7 \Rightarrow x = 11k + 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$

پس معادله جواب دارد.








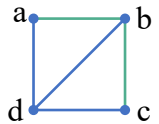
سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

۱/۵

۱۰

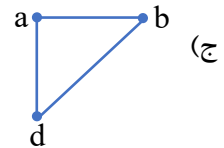
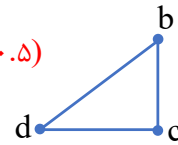
۱

۱۱

	<p>معادله هم‌نهشتی </p> <p>یک رابطه هم‌نهشتی به همراه مجهولی مانند x به فرم $ax \equiv b^m$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌گوییم و منظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق می‌کند.</p> <p>قضیه: معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, m) b$.</p> <p>نتیجه قضیه: در معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b^m$، اگر $(a, m) = 1$ باشد، معادله همواره دارای جواب است.</p> <p>توجه: اگر در معادله هم‌نهشتی ضریب x عددی غیر از یک باشد برای رسیدن به جواب‌های عمومی معادله، ابتدا باید به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی ضریب x را حذف کنیم.</p> <p>مسیر تمرینی: </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۸ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۳ مطرح شده بود.</p>	
۱/۵	<p>مصّحّح شو </p> <p>(۰.۲۵) باید تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی $x + y = 9$ را پیدا کنیم: (صفحه ۳۰)</p> $\begin{cases} x = k \\ y = 9 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}), x \geq 0, y \geq 0$ <p>(۰.۲۵) 10 مقدار صحیح برای k یافت می‌شود. $\Rightarrow k \geq 0, 9 - k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq 9 \Rightarrow 10$ (۰.۵)</p> <p>بنابراین این کار را می‌توان به 10 طریق انجام داد.</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه </p> <p>معادله سیاله </p> <p>به معادله $ax + by = c; (a, b, c \in \mathbb{Z})$ معادله سیاله درجه اول (خطی) می‌گوییم هرگاه جواب‌های این معادله (یعنی x و y) در اعداد صحیح باشند.</p> <p>توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله $ax + by = c$ جواب داشته باشد این است که: $(a, b) c$.</p> <p>مثال: آیا معادله سیاله $4x + 6y = 9$ جواب صحیح دارد؟ دلیل بیاورید.</p> <p>خیر. زیرا $2 = (4, 6) \neq 9/2$.</p> <p>حل معادله سیاله با تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی </p> <p>ابتدا معادله سیاله را به یکی از دو صورت زیر تبدیل به معادله هم‌نهشتی می‌کنیم:</p> $ax + by = c \rightarrow \begin{cases} b \\ ax \equiv c \\ a \\ by \equiv c \end{cases}$ <p>سپس معادله هم‌نهشتی موردنظر را حل کرده و جواب به‌دست آمده را در معادله سیاله قرار داده و با حل آن جواب دیگر را به‌دست می‌آوریم.</p>	۱۲
۲	<p>مصّحّح شو </p> <p>(صفحه ۴۱)</p> <p>(الف)  (ب) $dcbad$ (۰.۵) (۰.۵) $e \cdot$</p>	۱۳

$$q(\bar{G}) + \Delta(\bar{G}) = 5 + 4 = 9 \quad (د)$$

(۰.۵)



راهنمای مصحح:

در قسمت «ب» به هر دور به طول ۴ دیگری نیز نمره تعلق می‌گیرد و در بخش «ج» به هر زیرگراف از مرتبه ۳ و با اندازه ۳ دیگری نیز نمره تعلق می‌گیرد.

بررسی دقیق‌تر:

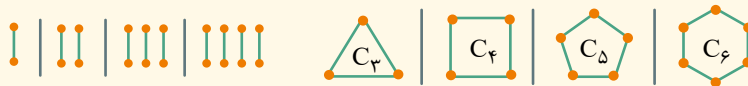
(د) از آن‌جا که G ، ۵ رأس دارد:

$$q(\bar{G}) = q(K_5) - q(G) = \binom{5}{2} - 5 = 5$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

همه چیز درباره گراف

گراف ساده‌ای که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر عدد K باشند را گراف K -منتظم می‌نامیم. بدیهی است که در هر گراف K -منتظم، رابطه $\Delta = \delta = K$ برقرار است و برعکس.



اگر دنباله درجات گرافی، تشکیل دنباله حسابی یا هندسی بدهند، گراف منتظم است. گراف n -منتظم را که هیچ یالی ندارد گراف تهی می‌نامند و یک گراف تهی n رأسی را با \bar{K}_n نشان می‌دهند.



♦ اگر G یک گراف K -منتظم از مرتبه p با اندازه q باشد، آن‌گاه اندازه گراف G از رابطه مقابل به دست می‌آید: $p \times K = 2q$

♦ تعداد دورهای به طول m در گراف کامل مرتبه p برابر $\binom{p}{m} \frac{(m-1)!}{2}$ است.

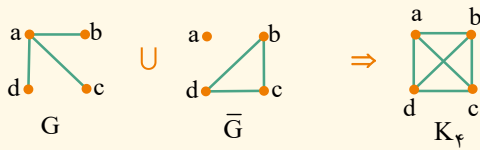
♦ تعداد اعدادی که کوچک‌تر مساوی n هستند و بر k بخش‌پذیرند برابر $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ است.

مکمل گراف

مکمل گراف G که آن را با G^c یا \bar{G} نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس \bar{G} یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس از G یالی وجود نداشته باشد، به عبارت دیگر: رأس‌های گراف \bar{G} ، همان رأس‌های گراف G است ولی یال‌هایش، یال‌هایی هستند که G آن‌ها را ندارد.



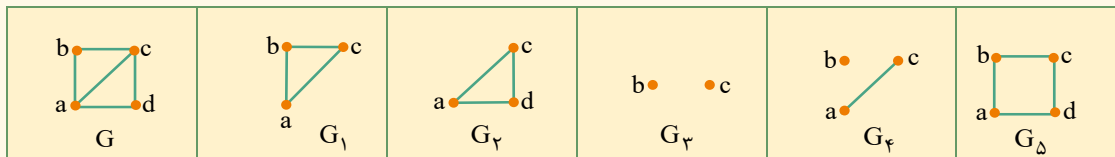
از روی هم قرار دادن یک گراف مانند G و مکمل آن یعنی \bar{G} ، یک گراف کامل به دست می‌آید.



اگر گراف \bar{G} مکمل گراف G باشد، گراف G نیز مکمل گراف \bar{G} است.

زیرگراف

اگر G یک گراف ساده باشد، در این صورت یک زیرگراف از گراف G گرافیتیست که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد. گراف G در جدول زیر را در نظر بگیرید، گراف‌های G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 همگی زیرگراف‌هایی از G هستند:



مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۷ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰ مطرح شده بود.

مصّحح شو

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg v_i = 2q(G) \Rightarrow 24 = 2q(G) \Rightarrow q(G) = 12 \quad (0.25) \quad (39 \text{ صفحه})$$

حال می‌دانیم در گراف کامل K_p ، $\binom{p}{2}$ یال داریم، بنابراین:

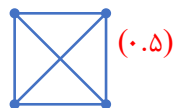
$$\binom{p}{2} = 12 + 3 = 15 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 15 \Rightarrow p^2 - p - 30 = 0 \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow (p-6)(p+5) = 0 \Rightarrow p = 6 \quad (0.25)$$

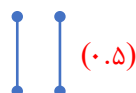
سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: **۴ دقیقه**

مصّحح شو

الف) برای رسم گراف K -منتظم با ۴ رأس که K بیشترین مقدار ممکن باشد، باید گراف K_4 را رسم کنیم. (۳- منتظم) (صفحه ۴۲)



ب) مکمل گراف قسمت «الف»، گراف تهی است اما چون می‌خواهیم گراف غیرتهی باشد، گراف ۱-منتظم رسم می‌کنیم.



سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: **۲ دقیقه**

۲۰

موفق باشید.